# PART3 導関数

## 要点① 導関数

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad\qquad}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\qquad\qquad=$$

$f'(a)=2a$ において，$a$ の値を1つ決めると，それに対応して微分係数 $f'(a)$ の値がただ1つ定まる。例えば $f'(3)=\qquad=6$ である。よって，微分係数 $f'(a)$ は $a$ の「　　　」といえる。

$f'(a)=2a$ において，$a$ を $x$ におき換えると，$x$ の関数 $f'(x)=2x$ が得られる。
このように，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ において，$a$ を $x$ におき換えることで得られる関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の「　　　　」という。

**導関数**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

※導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ の式において，$x$ の変化量 $h$ を「$x$ の　　　」といい，$\Delta x$（デルタエックス）と表す。また，このときの $y$ の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を「$y$ の　　　」といい，$\Delta y$（デルタワイ）と表す。$\Delta x$，$\Delta y$ を用いると，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\quad}{\quad}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\qquad)-f(x)}{\qquad}$$

と表される。

関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「　　　　　　　」，または単に「　　　　」という。

関数 $y=f(x)$ の導関数を表す記号として，$f'(x)$ のほかに $y'$，$\dfrac{dy}{dx}$（ディーワイ・ディーエックス）や，$\dfrac{d}{dx}f(x)$（ディー・ディーエックス・エフエックス）などが用いられる。

【MEMO】

**3** 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$

(2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=x^3$

(4) $f(x)=4$

## Point Pickup

**導関数の定義**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

# 第 16 講 PART3 確認問題

導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

**1** $f(x)=3x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{ア}}\,h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\text{ア}}$$

$$=\boxed{\text{イ}}$$

**2** $f(x)=4x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{ウ}}\,xh+\boxed{\text{エ}}\,h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}\,h\right)$$

$$=\boxed{\text{オ}}\,x$$

**3** $f(x)=2x^3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{カ}}x^2h+\boxed{\text{キ}}xh^2+\boxed{\text{ク}}h^3}{h}$$

$$=\boxed{\text{ケ}}$$

[$\boxed{\text{ケ}}$ の選択肢]

① $x^2$　② $2x^2$　③ $6x^2$　④ $6x^3$

**4** $f(x)=-2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\boxed{\text{コ}}$$

① $0$　② $1$　③ $-2$　④ $-2x$

[MEMO]

# PART3 導関数

**3** 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=x^2$

(3) $f(x)=x^3$ (4) $f(x)=4$

**[解答]**

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{4-4}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$

# 第16講　PART3 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：3，イ：3

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[A]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}3$$
$$=3$$

[A]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「微分する」という。

**2** **[正解]** ウ：8，エ：4，オ：8

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[B]}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{8xh+4h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)$$
$$=8x$$

[B]　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**3** **[正解]** カ：6，キ：6，ク：2，ケ：③

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(6x^2+6xh+2h^2\right)$$

$$=\mathbf{6x^2}$$

［C］　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**4** **[正解]** コ：①

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [D]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2-(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0=\mathbf{0}$$

［D］　導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$